



TITLE:

Young tableauをめぐって : GLの幾何と表現論 I (flag variety と Robinson-Schensted対応)
(組合せ論とその周辺の研究 : 可換環論・代数幾何・Lie環の表現論と半順序集合の相互関係)

AUTHOR(S):

寺田, 至

CITATION:

寺田, 至. Young tableauをめぐって : GLの幾何と表現論 I (flag variety と Robinson-Schensted対応)(組合せ論とその周辺の研究 : 可換環論・代数幾何・Lie環の表現論と半順序集合の相互関係). 数理解析研究所講究録 1988, 670: 163-187

ISSUE DATE:

1988-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100755>

RIGHT:

Young tableau をめぐって —— GL の幾何と表現論 I (flag variety と Robinson-Schensted 対応)

東大・理 寺田 至 (Itaru Terada)

この報告では, Young tableau をめぐる『おもしろいもの』として Robinson-Schensted 対応に着目し, flag variety の cohomology 群上の対称群の表現の分解を決める問題への応用を紹介する。この報告集の中の松澤淳一氏の記事では, この Robinson-Schensted 対応の幾何学的な意味づけを直接的なことは述べた R. Steinberg の結果が紹介されるはずであり, 大変興味深い。

1. 序 (Young tableau)

まず Young tableau の定義を与え, 続いて Robinson-Schensted 対応について少し述べる。

Young tableau (複数形が tableaux) とは次のようなものである。

定義 n を自然数とする。 n の 分割 (partition) とは,

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ ただし $\ell \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($1 \leq i \leq \ell$),

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell$ かつ $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$

なる有限列をいう。 λ が n の分割であることを

$\lambda \vdash n$

で表す。 $\lambda \vdash n$ のとき, λ を表す Young 図形 (Young diagram)

とは, 図1のように正方形を配置して, 第 i 行の正方形の個数で λ_i を表したものをいう。 shape が λ の (Young) tableau

とは, λ を表す Young 図形の正方形に1つずつ自然数を書きこんだものをいうが, 簡単のため図2, 図3のように正方形を書かずに数字だけ並べて書き表すことにする。 Young tableauのうち, standard tableau とは, 数字 $1 \sim n$ を1個ずつ使い, さらに図2の右側に不等号で示したように, 右と下に単調増加になるように並べたものをいう。 また semistandard tableau とは, 使う数字の範囲には条件をつけず, 同じ数字を2箇所以上を書くことも許して, 図3の右側に不等号で示

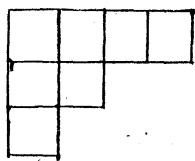


図1 $\lambda = (4, 2, 1)$ を表す Young 図形

したように, 右には等号を許して単調非減少, 下には等号を許さず単調増加になるように並べたものをいう。

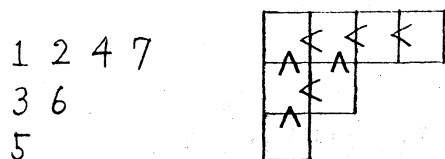


図2 shape が $(4, 2, 1)$ の standard tableau の例と standard の条件

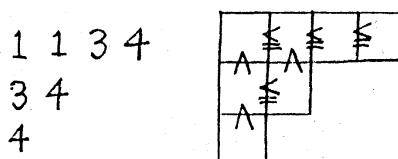


図3 shape が $(4, 2, 1)$ の semistandard tableau の例と semistandard の条件

Young tableau は, 対称群や $GL(n, \mathbb{C})$, さらに $Sp(2n, \mathbb{C})$, $SO(N, \mathbb{C})$ 等の表現のさまざまな性質を記述するのに用いられてきた。あとで対称群の表現が話題になるので, 対称群の表現論の基本的事実に触れておく。

定理 1 n 次対称群を \mathfrak{S}_n (\mathfrak{S} はドイツ文字のエス) で表すとき,

(1) \mathfrak{S}_n の \mathbb{C} 上の既約表現は n の分割と自然に 1 対 1 に対応する。

(2) n の分割 λ に対応する既約表現を ρ_λ で表すとき,
 $\deg \rho_\lambda$ (表現空間の次元) $= \# \text{STab}(\lambda)$ である。——

ただし, 1 つ未定義の記号が出ていて,

$$\text{STab}(\lambda) = \{ \text{shape が } \lambda \text{ の standard tableaux} \}$$

とする。

例 $n = 3$ 3 の分割は $(3), (2, 1), (1, 1, 1) = (1^3)$ の 3 つある。

$$\text{STab}((3)) = \{ 123 \},$$

$$\text{STab}((2,1)) = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}, \quad \text{STab}((1^3)) = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}.$$

従って \mathcal{O}_3 の既約表現の parametrization と次数は

$\rho_{(3)}: 1$ 次元 (実際は trivial 表現)

$\rho_{(2,1)}: 2$ 次元 (base vector e_1, e_2, e_3 に \mathcal{O}_3 として作用する
3 次表現から, $e_1 + e_2 + e_3$ の張る空間に作用
する trivial 表現を除いたもの)

$\rho_{(1^3)}: 1$ 次元 (符号表現, $\rho_{(1^3)}(\sigma) = \text{sgn } \sigma$)

となる。一般の n については [I], [JK] 等を参照。

さて, Young tableau にまつわる組合せ的構造として取り上げる Robinson-Schensted 対応とは, 次のような全単射である。一般に有限群 G の \mathbb{C} 上の既約表現の同値類の代表系を $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s\}$ とし, $\deg \rho_i$ (表現空間の次元) $= d_i$ ($1 \leq i \leq s$) とおくと,

$$|G| = \sum_{i=1}^s d_i^2$$

が成立する。これを $G = \mathcal{O}_n$ に適用すると, 上述の定理 1 により,

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (\# \text{STab}(\lambda))^2$$

となる。これは次のような全単射が存在することを意味している。

$$\mathcal{X}_n \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \vdash n} \text{STab}(\lambda) \times \text{STab}(\lambda)$$

Robinson-Schensted 対応は、このような全単射を具体的に構成したものである。実際の構成は §3 で述べる。

Robinson-Schensted 対応は、それ自身美しい性質を持った、組合せ論的に興味深い対象であるが、その algorithmic な（または帰納的な）定義だけからは、この美しい対応が何を描写するものかは明らかでない。しかしながらその重要性は次の点からうかがうことができる。

(1) 対称群及び $GL(n, \mathbb{C})$ の表現論（さらには古典型 Weyl 群、古典型複素 Lie 群の表現論）において欠くことのできない Littlewood-Richardson 法則の証明の鍵となること。元来、Robinson-Schensted 対応は G. de Robinson が Littlewood-Richardson 法則を証明しようとして [R] で導入したもので、後にその議論は G. Thomas [Th2], D. White [W], I. G. Macdonald [Macd] などがそれぞれ完成に導いた。

(2) 対称群の元の、left cell と right cell への分割を記述していること。left cell, right cell については [KaL], [Ta] 等を参照していただきたい。

2. 問題 (flag variety の cohomology 環上の \mathcal{F}_n の表現)

問題を説明するため, flag variety とその homology 群, cohomology 群について述べる。以下自然数 n を fix する。また $V = \mathbb{C}^n$ とおき, $(e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \dots, e_n^{(0)})$ を標準的な基底とする。

定義 V の flag とは, V の部分空間の列 $F = (V_0, V_1, \dots, V_n)$, $\dim V_i = i$ ($0 \leq i \leq n$) で

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$$

なるものをいう (正確には complete flag という)。

V の flag の全体を X とおく。 X は $GL(n, \mathbb{C})$ が可移に作用する複素 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次元の複素多様体である。 X 上の 1 点 $F^{(0)}$ を $F^{(0)} = (V_0^{(0)}, V_1^{(0)}, \dots, V_n^{(0)})$, $V_i^{(0)} = \mathbb{C}e_1^{(0)} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_i^{(0)}$ で定めると $F^{(0)}$ の stabilizer は上半三角行列の全体になる (これを B とおく。 B は $G = GL(n, \mathbb{C})$ の 1 つの Borel 部分群と呼ばれる)。従って $X = G/B$ と表される。 $X \ni F$ を $F = gB$ ($g \in G$) と表すには, V の基底 (e_1, e_2, \dots, e_n) であって $V_i = \mathbb{C}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_i$ ($1 \leq i \leq n$) となるものをとり, 列ベクトル e_1 から e_n までを並べた行列を g とおけばよい。

$F \in X$ を任意に与えたとき, 今のような基底 (e_1, e_2, \dots, e_n)

であって、 V の標準的な Hermite 積に関する正規直交基底になっているものがとれることがわかる。このとき行列 g は unitary 行列となる。従って $G = GL(n, \mathbb{C})$ の部分群 $K = U(n) = \{n\text{-次 unitary 行列}\}$ が多様体 X に可移に作用している。 K (特に、 X は compact である) 中の F_0 の stabilizer は、 $T = \{\text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_n) \mid t_i \in \mathbb{C}, |t_i| = 1 (1 \leq i \leq n)\}$ である。(T は K の (1つの) maximal torus と呼ばれる部分群である。) 従って X は多様体として K/T とも表される。 X を flag manifold または flag variety (X には non-singular な代数多様体の構造が入るので) と呼ぶ。

次に n 次対称群の X への作用を与える。 $K = U(n)$ 中の部分群 T の normalizer を $N_K(T)$ で表す。 $N_K(T)$ は、各行にも各列にも 0 でない成分が 1 つずつ存在し、それが絶対値 1 の複素数であるような行列の全体である。 $W = N_K(T)/T$ とおくと W は K の Weyl 群と呼ばれる有限群になる。 K の Weyl 群は n 次対称群 \mathfrak{S}_n に同型である。 \mathfrak{S}_n の元 w の $N_K(T)$ 中の任意の代表元 \tilde{w} をとる。(例えば置換行列がとれる。) このとき

$$X = K/T \ni kT \longmapsto k\tilde{w}^{-1}T \in X \quad (k \in K)$$

は well-defined で w の代表元 \tilde{w} のとり方によらず、 $W = \mathfrak{S}_n$ はこれによって X に位相変換群として作用する。

続いて X の homology 群, cohomology 群 を記述するため、 X

の cell 分解を与える。(例えば [Sp] 参照)

定理 2 (1) X は次のような cell 分解をもつ。

$$X = \bigsqcup_{w \in \mathcal{S}_n} X_w, \quad \text{ここで } X_w = BwB/B \approx \mathbb{C}^{l(w)} \approx \mathbb{R}^{2l(w)}$$

ただし $l(w)$ は \mathcal{S}_n の生成系 $\{(12), (23), \dots, (n-1, n)\}$ に関する元 w の長さ (生成元の積で書く式の長さの最小値) を表し, w の転倒数 $\#\{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, w(i) > w(j)\}$ に等しい。 X_w を Schubert cell と呼ぶ。

(2) \bar{X}_w の代表する $H_{2l(w)}(X; \mathbb{C})$ の homology 類を $[\bar{X}_w]$ とすると, $\{[\bar{X}_w] \mid w \in \mathcal{S}_n, l(w) = i\}$ は $H_{2i}(X; \mathbb{C})$ の基底となる。従って X の Poincaré 多項式は

$$\sum_{w \in \mathcal{S}_n} t^{2l(w)} = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2i-2})$$

に等しい。

さて, \mathcal{S}_n は X に位相変換群として作用しているから, 各次数の homology 群 $H_i(X; \mathbb{C})$ 及び cohomology 群 $H^i(X; \mathbb{C})$ に作用する。 $H^i(X; \mathbb{C})$ は \mathcal{S}_n の表現をこめて $H_i(X; \mathbb{C})$ の dual に同型である。cohomology 環 $H^*(X; \mathbb{C}) = \bigoplus_i H^i(X; \mathbb{C})$ 上の \mathcal{S}_n の表現については, A. Borel [Bo], C. Chevalley [C] により次がわかる。

定理3 $H^*(X; \mathbb{C})$ 上の \mathcal{A}_n の表現は, 群環 $\mathbb{C}[\mathcal{A}_n]$ 上の左正則表現と同値である。

従って \mathcal{A}_n の既約表現 ρ_λ をとると, $H^*(X; \mathbb{C})$ 中の ρ_λ の重複度は $\deg \rho_\lambda = \# \text{STab}(\lambda)$ に等しい。しかし cohomology 環の各次数別の重複度はどうだろうか。この問題に standard tableau を用いて答える結果がある。それを述べるためにいくつか記号と概念を定義する,

定義 $\lambda \vdash n$ に対し,

$$P_H(\rho_\lambda; t) = \sum_i [H^{2i}(X; \mathbb{C}) : \rho_\lambda]_{\mathcal{A}_n} t^i$$

とおく。ただし $[\cdots : \rho_\lambda]_{\mathcal{A}_n}$ は \mathcal{A}_n の表現 ρ_λ の重複度を表すものとする。

一方, $T \in \text{STab}(\lambda)$ に対し, T の S-index (正確には T から構成される Baxter sequence の S-index, [Th1] 参照)

$$\sum_{1 \leq i \leq n-1} i$$

T 中 $i+1$ は i より下の行にある

のことをいい, $S(T)$ で表す。例えば図2の standard tableau の S-index は $2+4=6$ である。

定理4 $\lambda \vdash n$ とするとき

$$P_H(\rho_\lambda; t) = \sum_{T \in \text{STab}(\lambda)} t^{S(T)}$$

例 $n=5$, $\lambda=(3,2)$ のとき

$$\text{STab}(\lambda) = \left\{ \begin{array}{cc} 1\ 2\ 3 & 1\ 2\ 4 \\ 4\ 5 & 3\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1\ 2\ 5 & 1\ 3\ 4 \\ 3\ 4 & 2\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1\ 3\ 5 & \\ 2\ 4 & \end{array} \right\}$$

$$\text{S-index} \quad 3 \quad 2+4=6 \quad 2 \quad 1+4=5 \quad 1+3=4$$

$$\therefore P_H(\rho_{(3,2)}; t) = t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6.$$

この定理がだれの定理かをひとことで述べるのは難しいが次の2つの道筋がある。

(1) A. Borel [Bo] の結果と J. Matsuzawa [Mat] の結果により、 $P_H(\rho_\lambda; t)$ を求める問題は $GL(n, \mathbb{C})$ の B. Kostant [Ko] の意味での generalized exponents を求める問題に言い換えられる。これはさらに B. Kostant の結果と W. Hesselink [H] の結果により Kostka-Foulkes 多項式と呼ばれる多項式の特別な場合を求めることに帰着する。G. Thomas [Th1] がこれを standard tableau を使って求められることを示した。

(2) G. Lusztig の unpublished result としてこの結果があることが R. Stanley [St] に記されている。

以下ではこれを Robinson-Schensted 対応を用いて証明する。

3. Robinson-Schensted 対応

ここでは序で触れた Robinson-Schensted 対応を特別の場合として含むような、少し一般的な対応を紹介する。

定義 自然数の有限列を 単語 (word) と呼ぶ。word を $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ のように表す。word w の weight とは、(1 の出現度数, 2 の出現度数, ...) と並べてできる数列のことをいう。ただし途中から 0 ばかりになったら適当に打ち切ることにする。semistandard tableau に対しても同様に数字の出現度数を並べた数列を weight と定義する。(standard tableau とは weight が $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ 個}}) = (1^n)$ の semistandard tableau である。)

対応の基本となる insertion という写像を定義する。

定義 T を shape λ の semistandard tableau, a を自然数とする。新しい semistandard tableau ($T \leftarrow a$ と書く) を次で帰納的に定義する。ただし $T(i, j)$ は T の第 i 行第 j 列の中身を表す, (そして $(T, a) \mapsto T \leftarrow a$ を insertion と呼ぶ。)

(1) $T = \phi$ または $T(1, j) \leq a$ ($1 \leq j \leq \lambda_1$) のとき

$$T \leftarrow a := \begin{array}{|c|} \hline T \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{1 行目の最後に} \\ a \text{ をつけ足す} \end{array} \right)$$

(2) $T(1, j-1) \leq a < T(1, j)$ なる j があるとき ($j=1$ に対しては左の不等号は無視する) $T(1, j) = b$ とおき, T の第2行目以降を semistandard tableau と思っ たものを \bar{T} と書いて

$$T \leftarrow a := \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \bar{T} \leftarrow b & \\ \hline \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \bar{T} \leftarrow b \text{ には 規則 (1), (2) } \\ \text{を再帰的に適用する.} \end{array} \right)$$

例

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & & \\ 2 & 2 & 3 & 3 & & & \\ 3 & & & & & & \\ 4 & & & & & & \end{array} \leftarrow 1 = \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & \textcircled{1} & 3 & & \\ 2 & 2 & 3 & 3 & & & \\ 3 & & & & & & \\ 4 & & & & & & \end{array} \leftarrow 2 = \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & & \\ 2 & 2 & \textcircled{2} & 3 & & & \\ 3 & & & & & & \\ 4 & & & & & & \end{array} \leftarrow 3 = \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & & \\ 2 & 2 & 2 & 3 & & & \\ 3 & & & & & & \\ 4 & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & & & & & & \\ 5 & & & & & & \end{array} \leftarrow 1 = \begin{array}{ccccccc} \textcircled{1} & & & & & & \\ 5 & \leftarrow 3 & & & & & \end{array} = \begin{array}{ccccccc} \textcircled{3} & & & & & & \\ \phi & \leftarrow 5 & & & & & \end{array} = \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 3 & & & & & & \\ 5 & & & & & & \end{array}$$

$T \leftarrow a$ が semistandard tableau になる ことの確認は容易である。また写像 $(T, a) \mapsto T \leftarrow a$ は, weight を保った ($T \leftarrow a$ の weight は T の weight に比べて a の出現度数だけが1だけ多いという意味で) 次のような全単射を与えている。

$$\text{SSTab}(\lambda) \times \mathbb{N} \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{\mu \vdash n+1} \text{SSTab}(\mu)$$

($\lambda \vdash n$ を fix している) s.t. μ の Young 図形は λ の Young 図形に 1 だけ正方形を加えたもの

ただし $\text{SSTab}(\lambda)$ は shape λ の semistandard tableau 全体の集

合を表すものとする。

insertionの逆写像は次のようにして作れる。入より第 i 行が1つだけ大きい μ と、 $U \in \text{SSTab}(\mu)$ が与えられたとする。第 i 行から $U(i, \mu_i)$ ($=: a_i$ とおく) を取除く。第 $i-1$ 行で a_i より小さい最右の元を $U(i-1, j_{i-1})$ ($=: a_{i-1}$) とするとき、 $U(i-1, j_{i-1})$ を a_i で置き換える。次に第 $i-2$ 行で a_{i-1} より小さい最右の元を $U(i-2, j_{i-2}) = a_{i-2}$ とし、 $U(i-2, j_{i-2})$ を a_{i-1} で置き換える。これを順に第1行まで繰返してでき上がった tableau を T 、最後に第1行から消された元を a とすると、対応 $U \mapsto (T, a)$ が insertion の逆写像を与える。

word w が与えられたとき、 ϕ から出発して次のように semistandard tableau $P(w)$ と standard tableau $Q(w)$ を作る。

定義 $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ とする。 $P^{(0)} = \phi$ から出発して、 $k = 1, 2, \dots, n$ に対し順に $P^{(k)} := P^{(k-1)} \leftarrow w_k$ とおく。また、 $P^{(k)}$ の shape は $P^{(k-1)}$ の shape と比べて1箇所だけ正方形が増えた Young 図形であるが、その増えた位置を (i_k, j_k) (第 i_k 行 第 j_k 列) とおく。このとき

(1) $P(w) := P^{(n)}$ とおく。

(2) $Q(w)$ は $P(w)$ と同じ shape の standard tableau で、第 i_k 行 第 j_k 列に数字 k を書いた ($1 \leq k \leq n$) ものとする。

$P(w)$ を word w の P-symbol, $Q(w)$ を word w の Q-symbol と呼ぶ。そして写像 $w \mapsto (P(w), Q(w))$ を Robinson-Schensted 対応 と呼ぶ。

例 $n=5$, $w = 23213$ のとき

$$p^{(0)} = \phi$$

増えた場所
↓

$$p^{(1)} = \phi \leftarrow 2 = 2$$

第1行第1列

$$p^{(2)} = 2 \leftarrow 3 = 23$$

第1行第2列

$$p^{(3)} = 23 \leftarrow 2 = \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$$

第2行第1列

$$p^{(4)} = \begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \leftarrow 1 = \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}$$

第3行第1列

$$p^{(5)} = \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix} \leftarrow 3 = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \\ 3 & & \end{smallmatrix}$$

第1行第3列

$$\text{従って } P(w) = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \\ 3 & & \end{smallmatrix}, \quad Q(w) = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & & \\ 4 & & \end{smallmatrix} \text{ となる。}$$

定理5 対応 $w \mapsto (P(w), Q(w))$ は次のような全単射を与える。

$$\{\text{長さ } n \text{ の words}\} \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \vdash n} \text{SSTab}(\lambda) \times \text{STab}(\lambda)$$

しかも, w の weight は $P(w)$ の weight に保存される。

逆写像は次のように与えることができる。 (P, Q) を与えられた shape の同じ semistandard tableau と standard tableau の pair とする。 Q の中で数字 $1 \sim k$ が埋めている Young 図形を $\lambda^{(k)}$ とおく ($1 \leq k \leq n$)。まず $p^{(n)} = P$ とおき, $k = n, n-1, \dots, 1$ に対して順に次を行う: shape $\lambda^{(k-1)}$ に対する insertion の逆写像を $p^{(k)}$ に適用して, $p^{(k)} = p^{(k-1)} \leftarrow w_k$ となるような, shape $\lambda^{(k-1)}$ の semistandard tableau $p^{(k-1)}$ と自然数 w_k を決める。最後に $p^{(0)} = \phi$ となり, $w = w_1 w_2 \dots w_n$ とおいてできる word が $(P(w), Q(w)) = (P, Q)$ となる w である。

序で触れた元祖 Robinson-Schensted 対応は, この特別な場合である。定義域を weight が $(1, 1, \dots, 1) = (1^n)$ の word に制限すると, P-symbol は standard tableau となり, weight が (1^n) の word $w_1 w_2 \dots w_n$ を $1 \sim n$ の順列と見なして \mathcal{S}_n の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix}$ と同一視すると, 序で触れた

$$\mathcal{S}_n \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \vdash n} \text{STab}(\lambda) \times \text{STab}(\lambda)$$

なる全単射を得る。単に Robinson-Schensted 対応といったときこれをさす場合も多い。この報告集の松澤氏の記事に使われているのもこの意味である。

一般の word の場合に戻り, 後に使う性質を 1 つ挙げておく。standard tableau T 中の i と $i+1$ の位置関係は, $i+1$ が

i より下の行にあるか, $i+1$ が i より右の列にあるかの 2 つに 1 つであることを注意しておく。

定理 6 w は長さ n の word, $1 \leq i \leq n-1$ とするとき

$$w_i \leq w_{i+1} \iff Q(w) \text{ 中 } i+1 \text{ は } i \text{ より右の列にある}$$

$$w_i > w_{i+1} \iff Q(w) \text{ 中 } i+1 \text{ は } i \text{ より下の行にある.}$$

Robinson-Schensted 対応 (またはそれを拡張した Knuth 対応) の性質については [Kn] に詳しい。また Knuth 対応を始めさまざまな version の拡張や analogue が作られている。いくつかを挙げると

- ★ $GL(n, \mathbb{C})$ の有理表現に関する version (Stembridge [Ste], [Su])
- ★ $Sp(2n, \mathbb{C}), SO(2n+1, \mathbb{C})$ に関する version (Berele [Bere], Sundaram)
- ★ Hall-Littlewood 多項式の parameter q に -1 を代入した "Schur の Q 関数" に関する version (B. Sagan [Sa])
- ★ B, C, D 型 Weyl 群の元の left cell, right cell への分割を記述する version (Barbash-Vogan [BaV])

4. 証明

定理4の等式を示すのが目標であるが、主張を少し変形する。

定義 $\lambda, \mu \vdash n$ のとき, shape が λ で weight が $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\ell'})$ の semistandard tableau (すなわち 1 が μ_1 個, 2 が μ_2 個, ……出てくるもの) 全体の集合を $SSTab(\lambda; \mu)$ で表す。また $K_{\lambda\mu} = \# SSTab(\lambda; \mu)$ とおく。

また半順序 $<$ (Snapper order) を

$$\lambda < \mu \iff \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \quad (\forall i)$$

(大きい i に対しては $\lambda_i = \mu_i = 0$ とみなす)

で定める。

定理7 $K_{\lambda\mu} \neq 0$ ならば $\lambda > \mu$ である。また $K_{\lambda\lambda} = 1$ である。([Macd] 参照)

これを使い, 定理4を次の主張に帰着する。

主張1 すべての $\mu \vdash n$ に対し次が成立する。

$$\sum_{\lambda \vdash n} P_H(\rho_\lambda; t) K_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda \vdash n} \left(\sum_{T \in SSTab(\lambda)} t^{S(T)} \right) K_{\lambda\mu}$$

主張 1 \Rightarrow 定理 4 は, 行列 $(K_{\lambda\mu})_{\lambda, \mu \vdash n}$ が可逆ならよいが, それは定理 7 により, λ 及び μ を半順序 $<$ に関して小さい順に並べ直しておくと $(K_{\lambda\mu})$ が対角 1 の下半三角行列になることからよい。

次に Gauss 多項係数と呼ばれる多項式を定義する。

定義 k_1, k_2, \dots, k_l を自然数, $\sum_{i=1}^l k_i = n$ とするとき

$$\left[\begin{matrix} n \\ k_1, k_2, \dots, k_l \end{matrix} \right]_t := \frac{\prod_{i=1}^n (1-t^i)}{\prod_{j=1}^l \prod_{i=1}^{k_j} (1-t^i)}$$

とおく。

主張 1 の両辺が実はこの Gauss 多項係数に等しいことを示すのが方針である。まず左辺を変形するため, Young の法則と呼ばれる対称群の表現論の事実を引用する。

定義 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l) \vdash n$ とするとき, \mathcal{S}_n の部分群 \mathcal{S}_μ を

$$\mathcal{S}_\mu = \left\{ \sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma(A_i) \subset A_i \ (1 \leq i \leq l) \right\}$$

$$\text{ただし } A_i = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \right) + 1, \left(\sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \right) + 2, \dots, \sum_{j=1}^i \mu_j \right\}$$

で定める。

定理 8 $\lambda, \mu \vdash n$ とするとき

$$\left[1_{\mathcal{S}_\mu} \uparrow^{\mathcal{S}_n} : \rho_\lambda \right]_{\mathcal{S}_\mu} = K_{\lambda\mu}$$

ただし $1_{\mathcal{A}_\mu} \uparrow \mathcal{A}_n$ は \mathcal{A}_μ の trivial 表現から誘導される \mathcal{A}_n の表現を表す。([JK] 参照)

定理 8 から, Frobenius 相互律により, ρ_λ の表現空間の中で \mathcal{A}_μ で fix される part の次元は $K_{\lambda\mu}$ に等しいことがわかる。それを主張 1 の等式の左辺に代入すれば, 左辺は $H^*(X; \mathbb{C})$ 中 \mathcal{A}_μ で fix される part の Poincaré 多項式に等しいこと:

$$(\text{左辺}) = \sum_i \left(\dim H^{2i}(X; \mathbb{C})^{\mathcal{A}_\mu} \right) t^i$$

がわかる。さらにこれを変形するため, \mathcal{A}_n の生成元である隣接互換 $(i, i+1)$ ($1 \leq i \leq n-1$) の $H^*(X; \mathbb{C})$ 上の作用を書き下す Bernstein-Gelfand-Gelfand [BernGG] の結果を引用する。

定理 9 $\{[\overline{X}_w] \mid w \in \mathcal{A}_n, \ell(w) = i\}$ の dual basis を $\{P_w\}$ ($H^{2i}(X; \mathbb{C})$ の basis) とするとき

$$(k, k+1) \cdot P_w = \begin{cases} P_w & w(k) < w(k+1) \text{ のとき} \\ -P_w + \sum_{\substack{w' \in \mathcal{A}_n \\ \ell(w') = i \\ w'(k) < w'(k+1)}} c_{w'} P_{w'} & (\exists c_{w'} \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$w(k) > w(k+1)$ のとき

従って, $J_\mu = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \dots, \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\ell\}$ とおけば, \mathcal{A}_μ は $\{(k, k+1) \mid k \in J_\mu\}$ で生成されるから, $H^{2i}(X; \mathbb{C})^{\mathcal{A}_\mu}$

は $\{ P_w \mid l(w)=i, w(k) < w(k+1) (\forall k \in J_\mu) \}$ で張られることがわかる。よって, $R_\mu = \{ w \in \mathcal{D}_n \mid w(k) < w(k+1) (\forall k \in J_\mu) \}$ とおけば

$$(\text{左辺}) = \sum_{w \in R_\mu} t^{l(w)}$$

となる。さらに \mathcal{D}_n の任意の元 w は $w = w_1 w_2$, $w_1 \in R_\mu$, $w_2 \in \mathcal{D}_\mu$ と一意的に分解され, $l(w) = l(w_1) + l(w_2)$ であることから,

$$\sum_{w \in \mathcal{D}_n} t^{l(w)} = \left(\sum_{w \in R_\mu} t^{l(w)} \right) \left(\sum_{w \in \mathcal{D}_\mu} t^{l(w)} \right)$$

となり,

$$\sum_{w \in \mathcal{D}_n} t^{l(w)} = \prod_{i=2}^n (1 + t + \dots + t^{i-1})$$

$$\sum_{w \in \mathcal{D}_\mu} t^{l(w)} = \prod_{j=1}^l \prod_{i=2}^{\mu_j} (1 + t + \dots + t^{i-1}) \quad (\because \mathcal{D}_\mu \cong \mathcal{D}_{\mu_1} \times \dots \times \mathcal{D}_{\mu_l})$$

であることより

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{\prod_{i=2}^n (1 + t + \dots + t^{i-1})}{\prod_{j=1}^l \prod_{i=2}^{\mu_j} (1 + t + \dots + t^{i-1})} = \frac{\prod_{i=1}^n (1 - t^i)}{\prod_{j=1}^l \prod_{i=1}^{\mu_j} (1 - t^i)} \\ &= \left[\begin{matrix} n \\ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l \end{matrix} \right] t \end{aligned}$$

と変形される。

次に右辺を考察する。 $K_{\lambda\mu} = \# \text{SSTab}(\lambda; \mu)$ であることより、右辺は $\text{STab}(\lambda) \times \text{SSTab}(\lambda; \mu)$ 上の和に書ける。 $\text{STab}(\lambda) \times \text{SSTab}(\lambda; \mu)$ は (第1因子と第2因子の順番が定理5と逆だが) Robinson-Schensted 対応によって weight が μ の word 全体に対応するから、

$$(\text{右辺}) = \sum_{w: \text{weight } \mu \text{ の word}} t^{S(Q(w))}$$

と書き直せる。ここで定理6を用いると、 $S(Q(w))$ は、古くから multiset permutation に対して使われている greater index で書き直すことができる。

定義 w を word とする。 w の greater index または major index とは

$$l(w) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ w_i > w_{i+1}}} i \quad (n \text{ は word } w \text{ の長さ})$$

で定義される $l(w)$ のことをいう。

すなわち、

$$(\text{右辺}) = \sum_{w: \text{weight } \mu \text{ の word}} t^{l(w)}$$

となる。ところが、これについては組合せ論の古い結果があ

る ([MacM] 参照)。

定理 10 k_1, k_2, \dots, k_ℓ を和が n になる自然数とするとき,

$$\sum_{w: \text{weight}(k_1, k_2, \dots, k_\ell) \text{ の word}} t^{(w)} = \left[\begin{matrix} n \\ k_1, k_2, \dots, k_\ell \end{matrix} \right]_t.$$

従って主張 1 の右辺も Gauss 多項係数になる:

$$(\text{右辺}) = \left[\begin{matrix} n \\ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell \end{matrix} \right]_t.$$

これで主張 1 の左辺と右辺が等しいことが示され, 従って定理 4 が証明された。

参考文献

- [Bo] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts, Ann. of Math. (2) 57(1953), 115-207.
- [BernGG] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, Schubert cells and cohomology of the spaces G/P , Russian math. surveys 28(1973), 1-26.
- [C] C. Chevalley, Invariants of finite groups generated by

- reflections, Amer. J. Math. 78(1955), 778-782.
- [H] W. H. Hesselink, Characters of the nullcone, Math. Ann. 252(1980), 179-182.
- [I] 岩堀長慶, “対称群と一般線型群の表現論”, 岩波講座基礎数学, 岩波書店
- [JK] G. James and A. Kerber, “The representation theory of the symmetric group,” Encyclopedia of Math., vol. 16, Addison-Wesley, 1981.
- [Kn] D. E. Knuth, Permutations, matrices and generalized Young tableaux, Pacific J. Math. 34(1970), 709-727.
- [Ko] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings, Ann. of Math. (2) 77(1963), 72-144
- [KaL] D. Kazhdan and G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Inventiones math. 53(1979), 165-184.
- [Macd] I. G. Macdonald, “Symmetric functions and Hall polynomials,” Oxford University Press, Oxford, 1979.
- [MacM] P. A. MacMahon, “Combinatory Analysis,” 2 vols., Cambridge University Press, Cambridge, 1915 and 1916.
- [Mat] J. Matsuzawa, On the generalized exponents of classical Lie groups, Comm. in Algebra (to appear).
- [R] G. de B. Robinson, On the representations of the symmetric group, Amer. J. Math. 60(1938), 745-760.

- [Sp] T.A. Springer, "Linear algebraic groups," Birkhäuser, Boston, 1981.
- [St] R.P. Stanley, Invariants of finite groups and their applications to combinatorics, Bull. of the Amer. Math. Soc. 6(1) (1979), 475-510.
- [Ta] 谷崎俊之, in "第5回代数セミナー報告集Ⅱ, 兵庫県城崎町, 1982年8月".
- [Th1] G.P. Thomas, Further results on Baxter sequences and generalized Schur functions, in "Combinatoire et représentation du groupe symétrique, Strasbourg 1976," Lecture Notes in Math., vol. 579, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1977.
- [Th2] ———, On Schensted's construction and the multiplication of Schur functions, Adv. in Math. 30(1978), 8-32.
- [W] D. White, Some connections between the Littlewood-Richardson rule and the construction of Schensted, J. Combin. Theory Ser. A 30(1981), 237-247.

追加

- [Bere] A. Berele, A Schensted-type correspondence for the symplectic group, J. Comb. Theory Ser. A 43(1986), 320-328.
- [BaV] D. Barbash and D. Vogan, Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups, Math. Ann. 259(1982),

153-199

- [Sa] B.E. Sagan, Shifted tableaux, skew Q -functions and a conjecture of R. Stanley, J. Comb. Theory Ser. A 45 (1987), 62-103.
- [Su] S. Sundaram, unpublished research note.
- [Ste] J. R. Stembridge, Rational tableaux and the tensor algebra of $\mathfrak{gl} n$, J. Combin. Theory Ser. A 46 (1987), 79-120.